حل **تمرین۱**- ضرایب سری فوریه را می یابیم.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} = \frac{1}{2}$$

اکنون a_0 و b_0 را محاسبه می کنیم.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos nx\,dx = \frac{\sin nx}{nx}\Big]_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx\,dx = -\frac{\cos nx}{nx}\Big]_0^{\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}$$

پس سری فوریه ی عبارت است از

$$f\ \ (x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin nx$$

چون

$$1-(-1)^n = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ 2 & n \text{ فرد} \end{cases}$$

خواهیم داشت

$$f\ \ (x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\,x}{2n-1}$$

از طرف دیگر داریم

$$\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ \frac{1}{2} & x=0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$$

بنابراین

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\,x}{2n-1}=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ \frac{1}{2} & x=0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$$

(آ) اگر در عبارت بالا قرار دهیم $x=\frac{\pi}{2}$ چون $\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}=(-1)^{n+1}$ ، داریم

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=1,$$

که نتیجه می دهد

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$$

(ب) تساوی پارسوال برای $f(x)$ را می یابیم. ابتدا سمت چپ تساوی پارسوال را می یابیم

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}dx=1$$

پس تساوی پارسوال برای $f(x)$ عبارت است از

$$1=2(\frac{1}{2})^2+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{\pi(2n-1)})^2\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2n-1)^2}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(پ) با جدا کردن جملات زوج و فرد در سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ می توان نوشت

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}.$$

از این رو با استفاده از (ب) خواهیم داشت

$$\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

در نتیجه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

حل تمرین۲- ابتدا ضرایب سری فوریه ی $f(x) = x$ را می یابیم. با توجه به این که تابع $f(x) = x$ یک تابع فرد است داریم

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = 0 \quad , \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx = 0 \quad ,$$

اکنون b_n را با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء محاسبه می کنیم

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}[\frac{-x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}(\frac{-\pi\cos n\pi}{n})$$

$$= \frac{2 - \pi(-1)^n}{n}$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

در نتیجه

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

و سری فوریه ی $f(x) = x$ عبارت است از

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(2(-1)^{n+1}}{n}) \sin nx, \quad -\pi < x < \pi.$$

ب) به ویژه اگر قرار دهیم $x = \frac{\pi}{2}$، آن‌گاه چون

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ (-1)^{k+1} & n = 2k-1, k = 1,2,\dots \end{cases}$$

داریم

$$\frac{\pi}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2(-1)^{n+1}}{n}\right)\sin n\frac{\pi}{2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2(-1)^{2k-1+1}}{2k-1}\right)(-1\,)^{k+1}$$

در نتیجه

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k}}{2k-1}\right)-\frac{\pi}{4}$$

(پ) برای یافتن تساوی پارسوال برای $f(x)=x$ ابتدا انتگرال زیر را محاسبه می کنیم

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{3}\pi^2.$$

در نتیجه تساوی پارسوال برای $f(x)=x$ عبارت است از

$$\frac{2}{3}\pi^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{(2(-1)^{n+1})}{n}\right)\right)^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}.$$

از این رو نتیجه ای آشنا را داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \ .$$

حل تمرین۳- ابتدا ضرایب سری فورریه ی $f(x) = x^2$ را می یابیم. با توجه به این که تابع $f(x) =$ x^2 یک تابع زوج است داریم

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sin\, nx\, dx = 0$$

a_0 عبارت است از

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\, dx = \ \frac{\pi^2}{3}.$$

اکنون a_0 را با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء محاسبه می کنیم

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}[x^2 \frac{\sin nx}{n} + 2x\frac{\cos nx}{n^2} - 2\frac{\sin nx}{n^3}]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[2\pi\frac{\cos n\pi}{n^2}\right]$$

$$= \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

در نتیجه

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

و سری فوریه ی $f(x) = x^2$ عبارت است از

$$x^2 = \frac{\pi^3}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx, \qquad -\pi \leq x \leq \pi.$$

(ب) به ویژه اگر قرار دهیم $x = 0$ ، آن‌گاه داریم

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}$$

و در نتیجه

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

همچنین اگر قرار دهیم $x = \pi$، آنگاه داریم

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos n\pi$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

و در نتیجه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$$

حل تمرین۴- ابتدا سری فوریه سینوسی $f(x) = x$ را می یابیم. داریم (تمرین ۲ را ببینید)

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} [\frac{-xcos\, nx}{n} + \frac{sin\, nx}{n^2}]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{n},$$

و در نتیجه سری فوریه ی سینوسی $f(x)$ عبارت است از

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} sin\, nx, \qquad 0 < x < \pi.$$

برای یافتن تساوی پارسوال ابتدا محاسبه می کنیم

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x)]^2 \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \, dx = \frac{2}{3} \pi^2 .$$

پس تساوی پارسوال برای سری فوریه ی سینوسی $f(x)$ عبارت است از

$$\frac{2}{3}\pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\right)^2$$

و در نتیجه

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

که نتیجه ای آشنا است. برای یافتن سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ می توان به صورت زیر عمل کرد:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

بنابراین

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$$

اکنون سری فوریه ی کسینوسی $f(x) = x$ را می یابیم. ابتدا a_0 را محاسبه می کنیم

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}[\cos n\pi - 1]$$

$$= \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2},$$

در نتیجه سری فوریه ی کسینوسی $f(x)$ عبارت است از

$$x = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}\cos nx, \qquad 0 < x < \pi.$$

اگر در سری فوریه کسینوسی $f(x) = x$ قرار دهیم $x = 0$ خواهیم داشت

$$0 = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}$$

که نتیجه می دهد

$$-\frac{\pi^2}{4} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2}{(2k-1)^2}$$

و بنابراین نتیجه زیر که در بالا نیز به دست آوردیم، حاصل می شود

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

تساوی پارسوال سری فوریه ی کسینوسی $f(x)$ عبارت است از

$$\frac{2}{3}\,\pi^2 = 2(\frac{\pi}{2})^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2} = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8(1-(1)^n)}{\pi^2 n^4}$$

در نتیجه

$$\frac{2}{3}\,\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8(1-(1)^n)}{\pi^2 n^4} \Rightarrow \frac{\pi^2}{48} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^4}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{96} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

برای یافتن سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ می نویسیم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} + \frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\,.$$

بنابراین

$$\frac{15}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

و در نتیجه چون $\frac{\pi^2}{96} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ ، داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{15}{16}\frac{\pi^2}{96} = \frac{\pi^4}{90}$$

موفق باشید- خواجه نوری