بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضی مهندسی

مدرس:

مریم خواجه نوری

مهرماه ۱۳۹۹

اطلاعات مورد نیاز

- **هدف درس:**

آشنایی با کاربرد ریاضیات در حل مسائل مهندسی شیمی

- **سرفصل کلی:**

بخش اول: سری فوریه، همگرایی فوریه، انتگرال فوریه، تبدیل فوریه و ...

بخش دوم: حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

(معادله حرارت، معادله لاپلاس، معادله موج و ...)

بخش سوم: آنالیز اعداد مختلط

توزیع نمره

- ❑ میان ترم ← ۱۰ نمره
- ❑ پایان ترم ← ۱۰ نمره

مراجع

- ❑ ریاضی مهندسی آقای عبدالله شیدفر
- ❑ ریاضی مهندسی آقای فرزین حاجی جمشیدی
- ❑ ریاضی مهندسی آقای دکتر طائری، دانشگاه صنعتی اصفهان

جلسه اول : سری فوریه

مقدمه و مفاهیم اولیه

سری‌های فوریه در حل مسائل فنی مهندسی و بویژه در مسائل مقدار مرزی کاربرد فراوانی دارند.

1) قبل از بحث سری فوریه لازم است اشاره‌ای به توابع متناوب داشته باشیم. تابع $f(x)$ را متناوب با دوره تناوب T می‌نامیم هرگاه:

جهت مثبت

$$\forall x\in D_f \qquad x+T \in D_f \ , \ f(x+T)=f(x)$$

- اگر T پریود یک تابع متناوب باشد kT برای $k\in \mathbb{Z}$ نیز دوره تناوب است.
- کوچکترین دوره تناوب f را دوره تناوب اصلی گوییم.

2) مثال‌های آشنا از توابع متناوب $\sin\frac{n\pi x}{l}$ و $\frac{n\pi x}{l}$ ها با دوره تناوب اصلی $\frac{2l}{n}$ می‌باشند.

مقدمه

$$\sin\frac{n\pi}{l}x = \sin\frac{n\pi}{l}(x+T) = \sin\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}T + \cos\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}T$$

$\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$

باید برقرار باشد

$$\begin{cases} \sin\frac{n\pi}{l}T = 0 \Rightarrow \frac{n\pi}{l}T = k\pi \qquad k\in\mathbb{Z} \\ \cos\frac{n\pi}{l}T = 1 \Rightarrow \frac{n\pi}{l}T = 2k'\pi \qquad k'\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \frac{n\pi}{l}T = 2k\pi$$

$2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$

$\Rightarrow T = \frac{2kl}{n}, \quad k\in\mathbb{Z}$ ⟶ از $k=1$ ⟶ دوره تناوب اصلی $\boxed{T = \frac{2l}{n}}$

همین ترتیب برای $\cos\frac{n\pi}{l}x$ نیز بدست می‌آید.

مقدمه

پس برای تابع ثابت $f(x)=1$ هر عدد حقیقی دوره تناوب آن است ولی دوره تناوب اصلی ندارد.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)=1 \Rightarrow \forall T, \quad f(x+T)=1$$

نتیجه: مجموعه توابع $\left\{ 1, \sin \frac{n\pi x}{l}, \cos \frac{n\pi}{l} x \right\}_{n=1}^{\infty}$ دارای دوره تناوب اصلی $2l$ می‌باشند.

- هرگاه f و g دو تابع با دوره تناوب T باشند آنگاه c_1f+c_2g ، $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ پریودیک با دوره تناوب T می‌باشند.
- مفهوم فوق را می‌توان به ترکیب خطی بینهایت تابع پریودیک به شرط همگرایی توسیع کرد یعنی اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ مجموعه‌ای از توابع متناوب با دوره تناوب اصلی T باشند آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ نیز تابع متناوب با دوره تناوب اصلی T است.

نتیجه: $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x$ متناوب با دوره اصلی $2l$ می‌باشد.

مقدمه

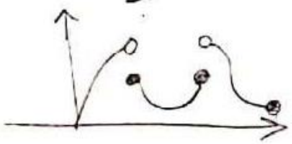
پرسشی که مطرح است این است که آیا برای یک تابع متناوب $f(x)$ در فاصله تناوب $-l \le x \le l$ یک سری نامتناهی وجود دارد بطوریکه رابطه زیر را داشته باشیم:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)$$

این سری به سری فوریه $f(x)$ موسوم است. بررسی همگرایی و یا چگونگی همگرایی این سری را به بعداً موکول می‌کنیم. این گونه سری‌ها اولین بار بوسیله ژوزف فوریه ۱۸۰۰ میلادی در رابطه با مسائل حرارت مورد بحث و توسعه قرار گرفت. مسلماً بالا ممکن است در مورد برخی از توابع درست نباشد. یک شرط اساسی عبارت است از شرط تکه‌ای هموار بودن تابع روی فواصل مورد بحث می‌باشد.

مقدمه

تابع $f(x)$ را در یک فاصله، قطعه تکه‌ای هموار گوییم هرگاه بتوان فاصله‌ها را به تعداد متناهی زیر فاصله تقسیم نمود بطوری که در هر یک از این زیر فاصله‌ها تابع $f(x)$ پیوسته و حدود چپ و راست تابع $f(x)$ در هر یک از نقاط انتهایی زیر فاصله‌ها متناهی باشد.



$f(x)=\frac{1}{x^2} \quad x\in[-1,1]$

$[-1,0)$, $(0,1]$ تکه‌ای پیوسته نیست.

فرض کنید تابع $f(x)$ در فاصله $(-l, l)$ تعریف شده و در خارج از این فاصله داشته باشیم $f(x+2l) = f(x)$

یعنی تابع $f(x)$ دارای دوره تناوب $2l$ باشد. سری فوریه یا بسط فوریه متناظر با $f(x)$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)$$

که در آن a_0 و a_n و b_n ضرائب سری فوریه نامیده می شوند.

سوال: a_0 و a_n و b_n چگونه محاسبه می شوند؟!!

سری بالا فقط یک سری متناظر با $f(x)$ می باشد و ما نمی دانیم که آیا این سری همگراست؟

اگر همگراست آیا به سمت $f(x)$ همگراست؟

مسئله همگرایی را در یک قالب قضیه ای مورد بررسی قرار گرفته است.

ابتدا به دنبال چگونگی بدست آوردن ضرائب می رویم و بعد بحث همگرایی سری.

پایان